



Zaskoczenie w poznaniu matematyczno- przyrodniczym

Z aksjologii
matematycznego
przyrodoznawstwa

Milowicz miał wypadek

Nieprzystojny aktor trafił do szpitala. Nie może się poruszać, wyjeżdża na kółkach, trenując do show „Gwiazdy tańczą na lodzie”. Wyrzucił się i uderzył głową o ścianę. STR. 11

KUMULACJA
9 000 000
Już dziś!
DUŻY ŁÓTEK
Żeby wygrać, trzeba grać!

WTOREK 28 PAŹDZIERNIKA 2008 Wyd. 1-PL www.fakt.pl

Fakt
GAZETA CO DZIEŃ
110
1 zł
Nr 255 (5527)
Niedziela 28.10.2008

Strajkujący lekarze zawiesili na szyjach wywożonych chorych tabliczki z napisem „Zgon”. Na wypadek, gdyby pacjenci umarli podczas transportu

Hańba w szpitalu
Dali mi tabliczkę śmierci

Straż pilnuje aut ministerów

Lekarze, gdzie wasze sumienia? Jak można dla pieniędzy ryzykować życie chorych. Na noszach, podługaczem do krolewek, byli wywiezieni ze szpitala w Głogowie pod Łodzią. Dopuszczono ich, opatrując kartkami z numerem do wpisania godziny śmierci! STR. 4-5

Fakt MAMIA! Już dziś kolejne numery STR. 15

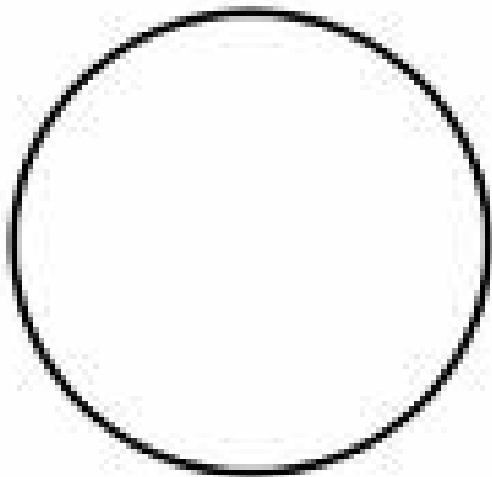
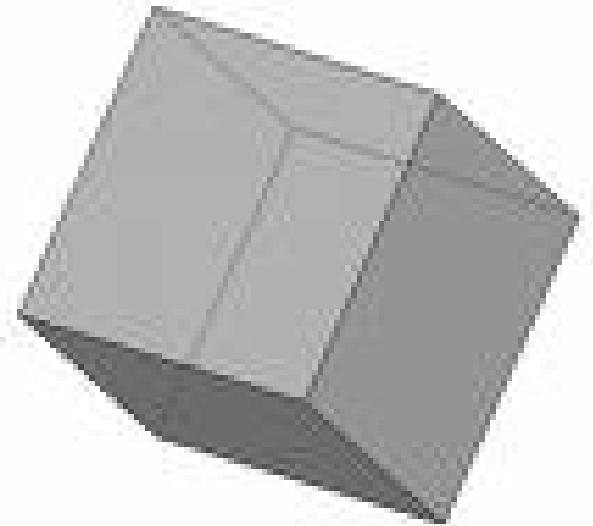
Cała prawda o milionach PZPN
• Listkiewicz - 20 tys. zł • Administracja - 30 mln zł STR. 10

W środę w Fakcie: Radzę od serca
Grzegorz Kłimek pociąga Cytelnikiem

Tabloid:
emblem
współczesnej
kultury -
sensacja,
oryginalność,
zaskakująca
informacja,
emocje

Czy można wykorzystać
zaskoczenie w nauczaniu
matematyki, fizyki?

Pole powierzchni figury i objętość bryły - przedmiotem zaskoczenia?



Inspirująca poznawczo funkcja zaskoczenia

- Objętość kul n -wymiarowych
- Igła Kakeyi
- Paradoks Banacha Tarskiego

Kula w przestrzeni 3 - wymiarowej

$$K_3(0, r) = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Kula w przestrzeni n-wymiarowej

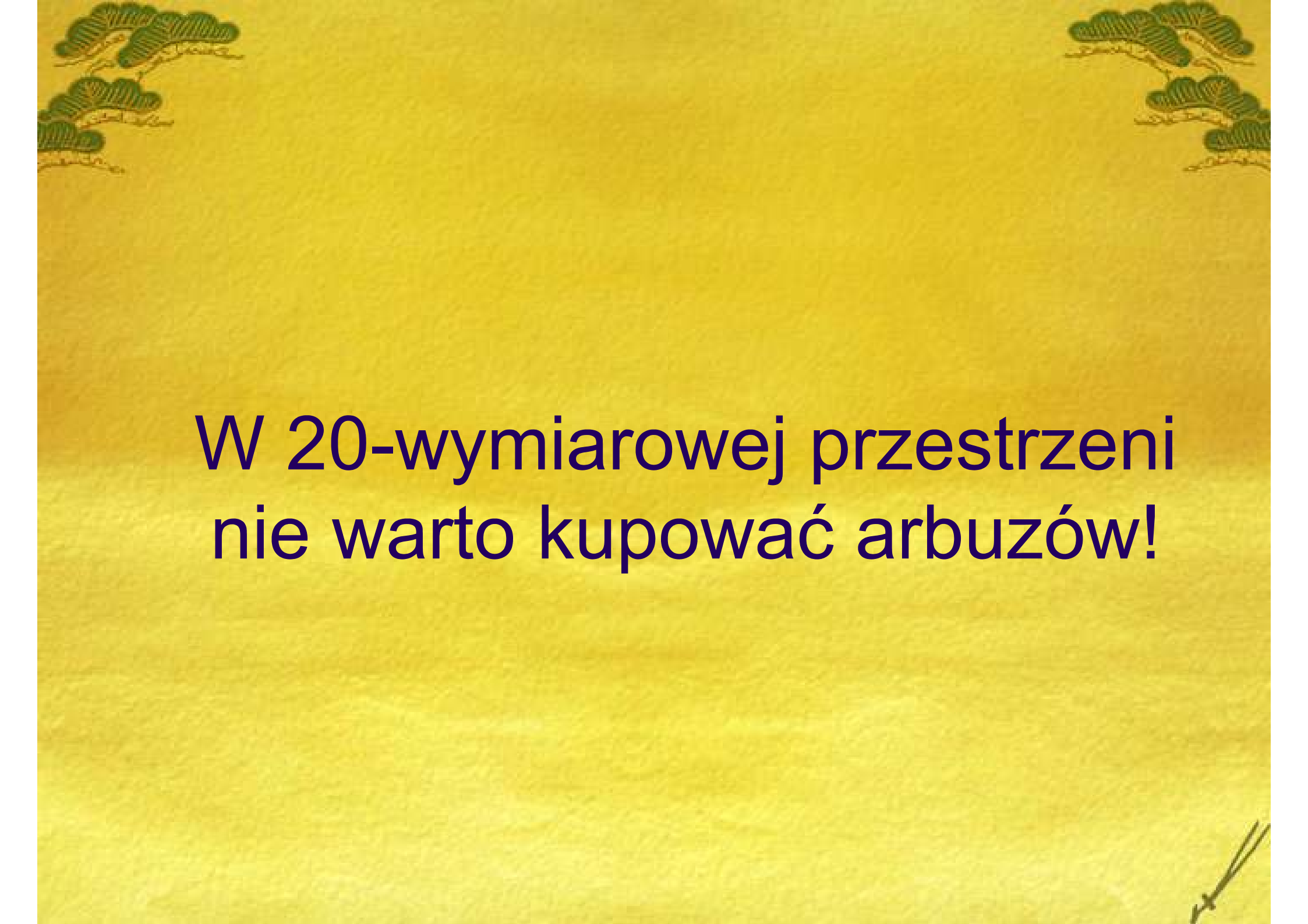
$$K_n(0, r) = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2 \}$$

$$V_n(0, r) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} r^n$$

Jaką objętość ma „skórka”
arbuza w 20 wymiarowej
przestrzeni?

$$r=20\text{cm}, d=1\text{cm}$$

$$\Delta V_{20} = V_{20}(r) - V_{20}(r-d) \approx \frac{2}{3} V_{20}(r)$$

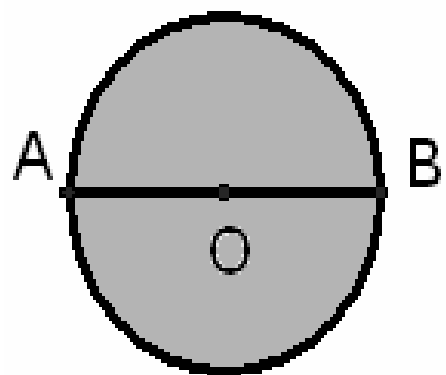


W 20-wymiarowej przestrzeni
nie warto kupować arbużów!

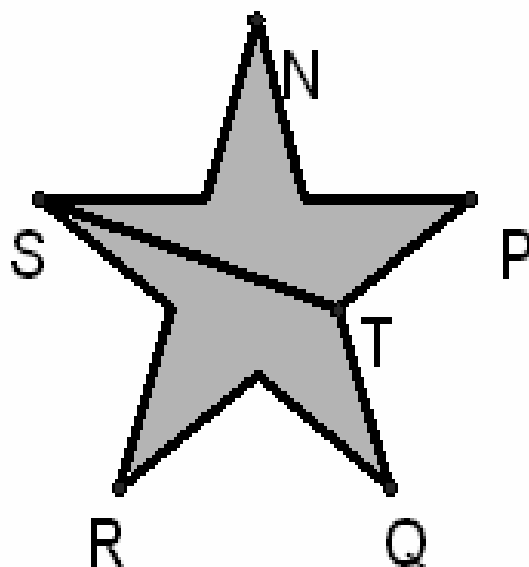
Problem S. Kakeyi (1917):

Jakie jest najmniejsze pole figury, w której odcinek o długości 1 może obrócić się o kąt 360 stopni pozostając cały czas wewnątrz figury?

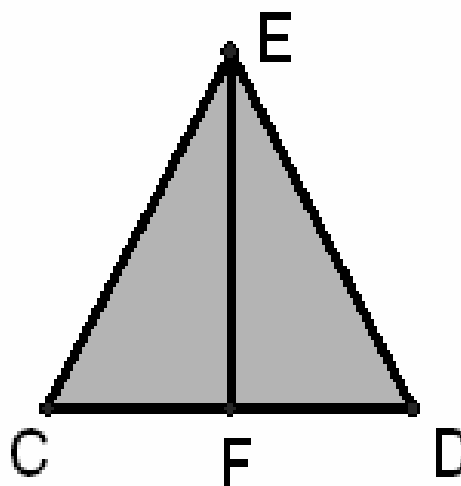
Nasuwające się rozwiązania



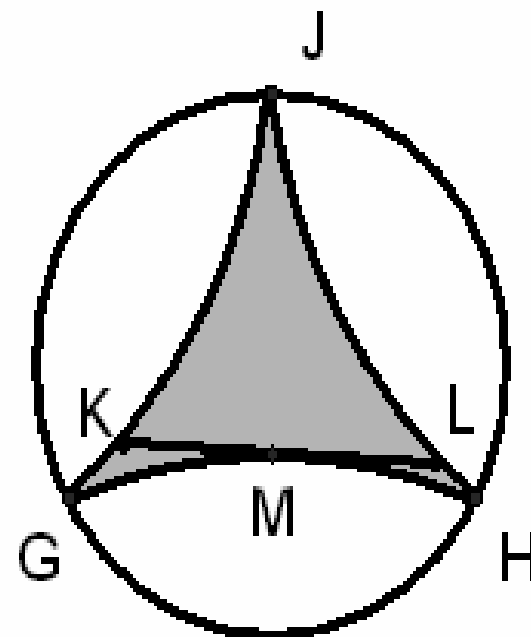
Area $\approx .78$



Area $\approx .59$

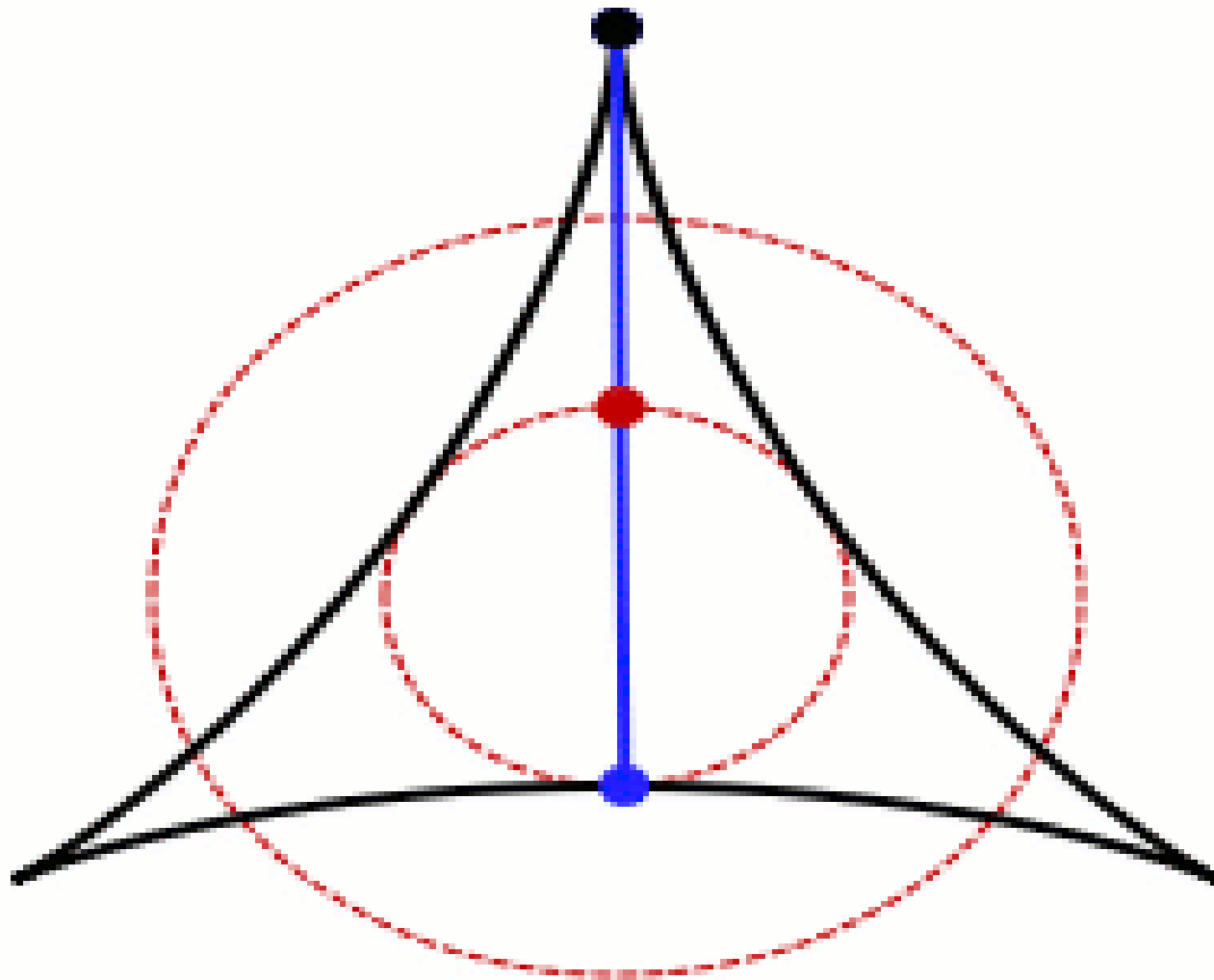


Area $\approx .58$



Area $\approx .39$

Deltoid



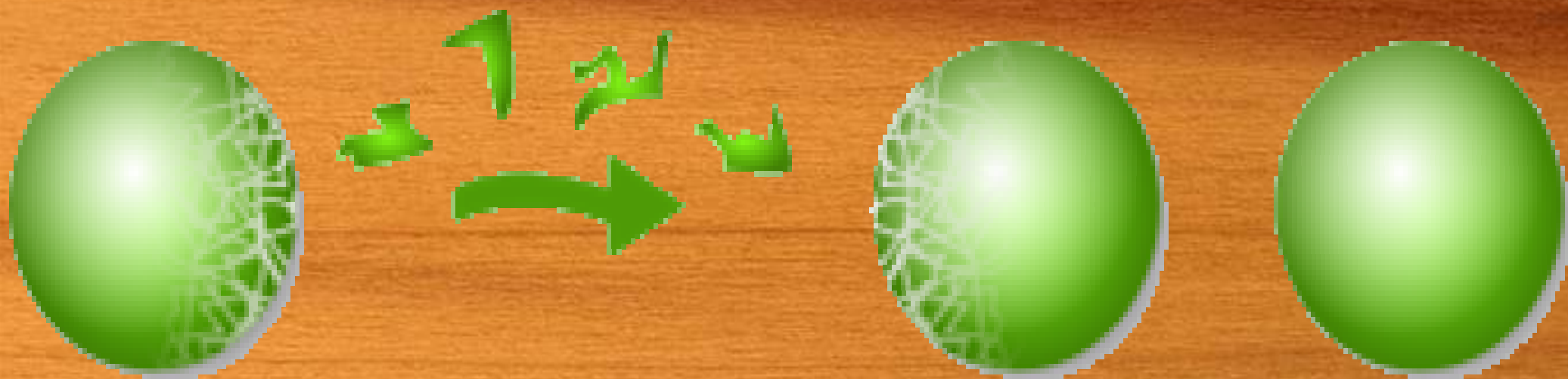
Rozwiązanie:

Można obrócić jednostkowy
odcinek o pełen kąt w sposób
ciągły *na nieskończenie małej*
powierzchni !

Zbiór, który może być zawarty w dowolnie małym polu prostokąta, albo w nieskończenie wielu prostokątach, których całkowite pole jest dowolnie małe, nazywamy zbiorem **miary zero**.

Nasza wyobraźnia geometryczna nie radzi sobie z takim zbiorami.

Paradoks Banacha Tarskiego



Paradoksalny rozkład kuli

Kula może być podzielona na pięć kawałków i mogą one zostać tak połączone, bez ściskania, rozciągania, że utworzą dwie kule tej samej objętości, co oryginalna.

$$K_3(0, r) = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2 \}$$

Istnieje rozkład tej kuli na pięć
parami rozłącznych zbiorów
A, B, C, D, E,
które przesuwając się obraca i
w efekcie otrzymuje się

$$K_3(0, r) = V_1(A) \cup V_2(B)$$

$$K_3(0, r) = V_3(C) \cup V_4(D) \cup V_5(E),$$

gdzie $V_1, V_2, \dots, V_5$

opisują izometryczne
przekształcenia części kuli

Zbiory są niemierzalne!

Miara zbioru

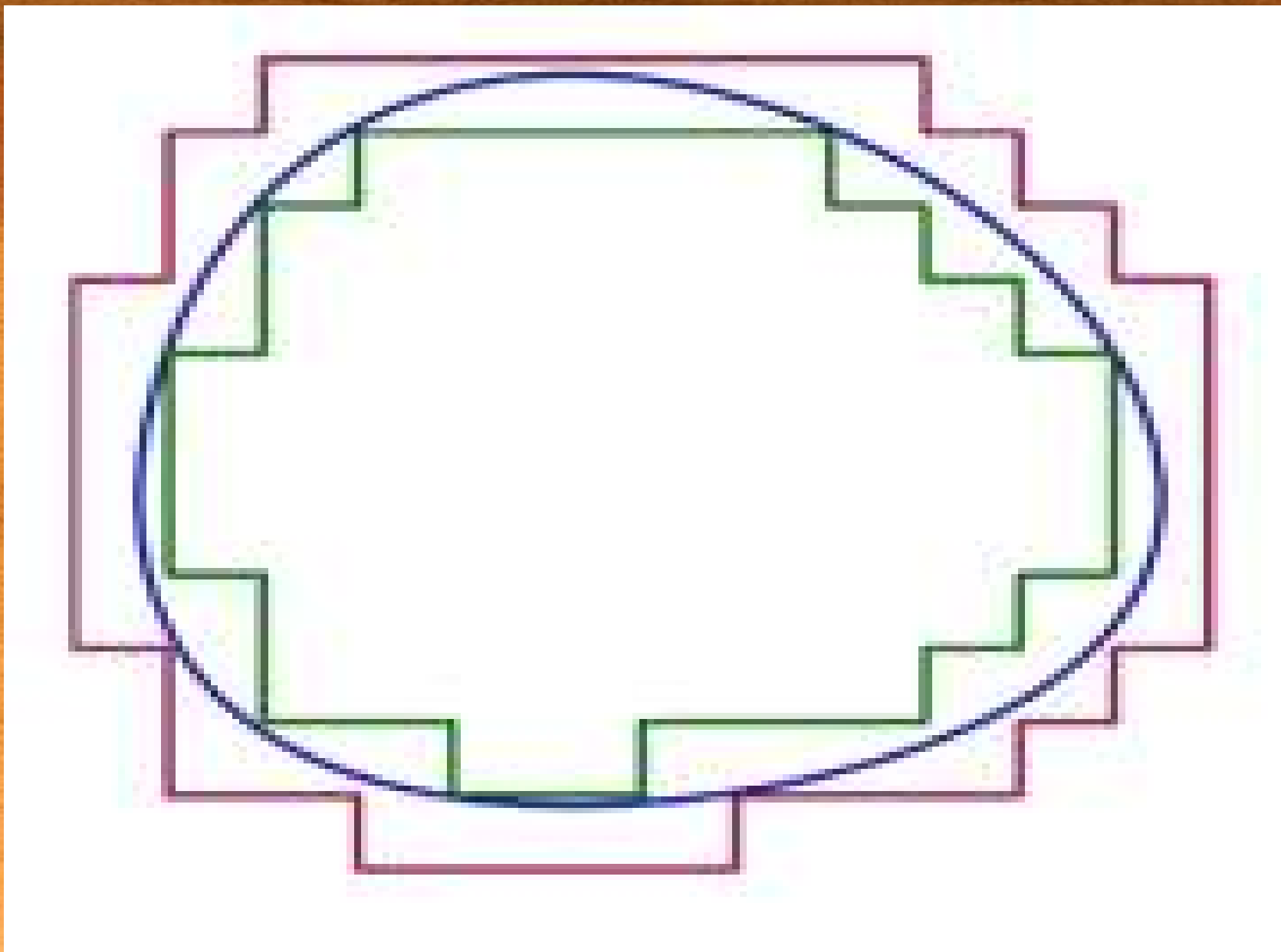
nieujemna funkcja addytywna
określona na ciele zbiorów
niezmiennicza ze względu na
izometrie

„Mierzenie” zbiorów

- Pole koła, objętość kuli, sześcianu
- Całka oznaczona Riemanna - miara Jordana
- Miara Lebesgue'a

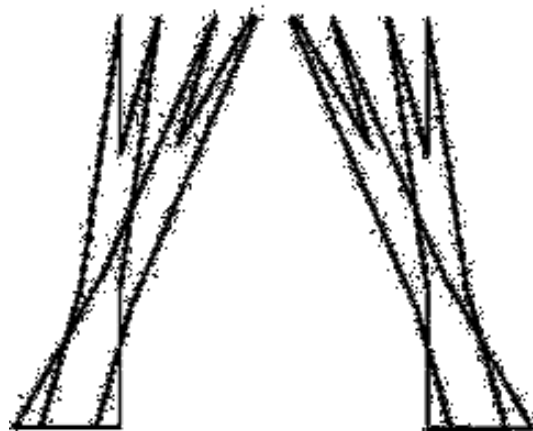
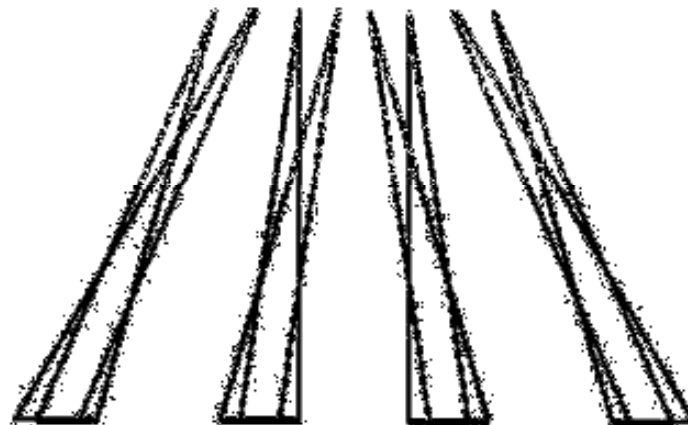
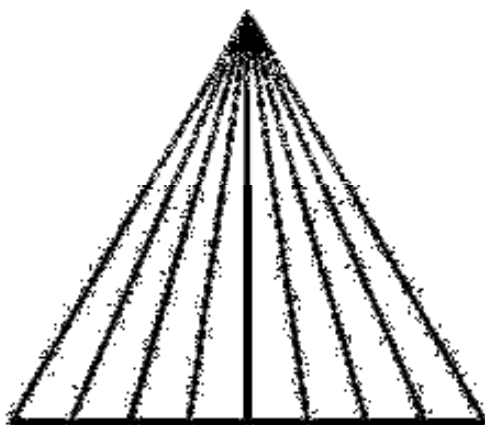
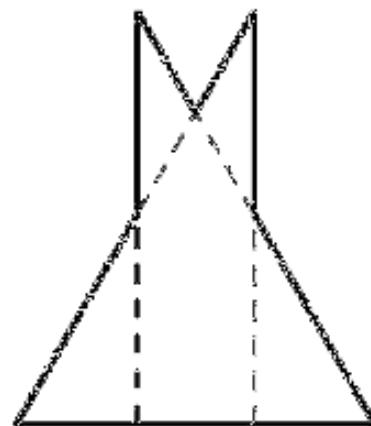
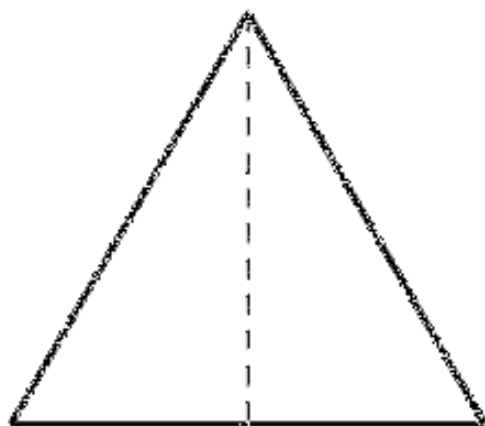
Jaką miarę ma zbiór wszystkich liczb wymiernych z odcinka $[0,1]$?

Miara Jordana



Paradoks Banacha - Tarskiego w języku teorii miary

Nie istnieje skończone addytywna
miara zdefiniowana na wszystkich
podzbiorach trójwymiarowej
przestrzeni, która jest
niezmiennicza ze względu na
izometrię i ma wartość jeden dla
jednostkowego sześciangu



Zbiór Besikowicza

